Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\frac{1}{\log_2 3}=2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2+mx-m=0$ **nu** are soluții reale.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-20}=\frac{1}{81}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n!\le n(n-1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6**. Determinați numărul real a, $a>1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(e)\right)=e$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele $a,\, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \frac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)\,dx=5$.

5p **b)** Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.