Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 3 - i$. Arătați că $z^2 - 6z + 10 = 0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 6$. Determinați numărul real a, știind că $f(a) = f(a-2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2 + 4x + 5\right) = \log_4(2x+4)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 16.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(3,3)$ şi $C(7,3)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră $E(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x + 2\sin\frac{5x}{3}$, unde $x \in (0,\pi)$. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a & -2a^2 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $A(n) = A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)$, atunci numărul natural n este multiplu de 2021.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - \sqrt{3}(x+y) + 3 + \sqrt{3}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3} * 0 = \sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x * y = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(y - \sqrt{3}\right) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}} * \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} * \ldots * \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1) + g(2) + \ldots + g(n)\right) = \frac{1}{e-1}$, unde $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{(x+2)^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x (x+1)^n (f(x))^n\,dx$.

Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.