

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
iulie 2022

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1.	a) $k \in \mathbb{Z}$ este soluție a ecuației, deci $k^2 + k + m = 0 \Rightarrow m = -k^2 - k$ , de unde obținem $m \in \mathbb{Z}$ $m = -k(k+1)$ , deci numărul întreg $m$ este divizibil cu 2	4p 3p
	b) $x_1^3 + x_1^2 = -mx_1$ , $x_2^3 + x_2^2 = -mx_2$ , $x_1 + x_2 = -1$ , $m \in \mathbb{R}^*$	3p
	$x_1 x_2 = m \Rightarrow \frac{x_1^2 + 1}{x_1^3 + x_1^2} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2^3 + x_2^2} = -\frac{1}{m} \left( \frac{x_1^2 + 1}{x_1} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2} \right) = -\frac{1}{m} \left( -1 - \frac{1}{m} \right) = \frac{m+1}{m^2}$ , $m \in \mathbb{R}^*$	3p
	$\frac{m+1}{m^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 = 0$ , de unde obținem $m = -2$	2p
2.	a) $AD$ este bisectoarea unghiului $BAC$ , deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$ Triunghiurile $MAN$ și $MAP$ sunt dreptunghice, au latura $AM$ comună și $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MAP$ $\Delta MAN \equiv \Delta MAP$ , de unde obținem $AN \equiv AP$	2p 3p 2p
	b) Dacă $DQ \perp AC$ , $Q \in AC$ , obținem că $MP \parallel DQ$ și, cum $AM = MD$ , obținem că $MP$ este linie mijlocie în $\Delta ADQ$ , deci punctul $P$ este mijlocul segmentului $AQ$ $AP = PQ$ , $AN = AP$ și $AC = 3AN$ , deci $PQ = QC$ și, cum $DQ \perp AC$ , obținem că triunghiul $DPC$ este isoscel, deci $DP = DC$ $\Delta ADN \equiv \Delta ADP$ , deci $DN = DP$ , de unde obținem că $DN = DC$ , deci triunghiul $CDN$ este isoscel	3p 3p 2p
	3.	a) $M(z) + M(-z) = A + zB + A + (-z)B = 2A$ , pentru orice număr complex $z$ $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ , deci $\det(2A) = 2^3 \det A$ și, cum $\det A = 1$ , obținem că $\det(M(z) + M(-z)) = 8$ , pentru orice număr complex $z$
	b) Pentru $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ , obținem $M(z) = \begin{pmatrix} a_{11} + z & a_{12} + z & a_{13} + z \\ a_{21} + 2z & a_{22} + 2z & a_{23} + 2z \\ a_{31} + 3z & a_{32} + 3z & a_{33} + 3z \end{pmatrix}$ , $z \in \mathbb{C}$	2p
	$\det(M(z)) = \begin{vmatrix} a_{11} + z & a_{12} + z & a_{13} + z \\ a_{21} - 2a_{11} & a_{22} - 2a_{12} & a_{23} - 2a_{13} \\ a_{31} - 3a_{11} & a_{32} - 3a_{12} & a_{33} - 3a_{13} \end{vmatrix} \Rightarrow \det(M(z)) = \alpha z + \beta$ , pentru orice $z \in \mathbb{C}$ , unde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$	2p
	$M(0) = A$ , deci $\det(M(0)) = 1$ , de unde obținem $\beta = 1$ , deci $\det(M(z)) = \alpha z + 1$ , $z \in \mathbb{C}$	2p
	$\det(M(1)) = \det(M(2))$ , deci $\alpha + 1 = 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 0$ , de unde obținem $\det(M(z)) = 1$ , pentru orice număr complex $z$	2p

<b>4.</b>	<p>a) <math>f'(x) = \frac{x^3 + 2 - 3x^3}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2(1 - x^3)}{(x^3 + 2)^2}, x \in [0, +\infty)</math></p> <p>Cum <math>x^3 &gt; 1</math>, pentru orice <math>x &gt; 1</math>, obținem că <math>f'(x) &lt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (1, +\infty)</math>, deci funcția <math>f</math> este strict descrescătoare pe <math>(1, +\infty)</math></p>	<b>4p</b>
	<p>b) <math>\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^3 + 2)^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3x^2}{(x^3 + 2)^2} dx =</math></p> <p><math>= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 2)'}{(x^3 + 2)^2} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^3 + 2} \Big _0^1 =</math></p> <p><math>= \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{18}</math></p>	<b>3p</b>
		<b>3p</b>
		<b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<p><i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>	<p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>	<p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p>
<p><i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate</li> <li>- respectarea formatului itemului</li> <li>- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)</li> <li>- corectitudinea științifică a informației de specialitate</li> </ul>	<p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>3p</b></p>