Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=1-a$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+4\right)=\log_4(6x-4)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre, cu cifra zecilor număr impar, se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-5)$ și $B(5,5)$. Determinați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=6$ și $\text{tg}C=\sqrt{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1-a & a\\ -3a & 3a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=5$.

5p **b)** Arătați că $A(a)-I_2=a\left(A(1)-I_2\right)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $A(m)\cdot A(2m)=A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+4$.

5p **a)** Arătați că $0\circ 3=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=3x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $x\circ a=x+a$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2+2x-2\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2+4x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f'(x)}=1$.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x+4}\left(x^2+2x-2\right)\le 6$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{3}{x}\right)dx=\frac{15}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}f(x)$ este crescătoare.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{f(x)}dx=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$.